

Задачі для залікових завдань з електродинаміки (5 семестр)

1. Довести тотожність:
$$\left[\begin{matrix} \vec{a}, \vec{b} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \vec{c}, \vec{d} \end{matrix} \right] = (\vec{a}, \vec{c})(\vec{b}, \vec{d}) - (\vec{a}, \vec{d})(\vec{b}, \vec{c})$$

2. Хай A_i - чотирьохвимірний вектор, довести, що $\partial A_i / \partial x_k$ - чотирьохвимірний тензор другого рангу.

3. Показати, що якщо $S_{\alpha\beta}$ симетричний тензор, а $A_{\alpha\beta}$ - антисиметричний тензор, то $A_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = 0$.

4. Написати диференційні операції градієнту, дивергенції и ротора в тензорному вигляді.

5. Обчислити $grad \frac{pr}{r^3}$ и $rot \frac{[\vec{p}, \vec{r}]}{r^3}$ (p - постійний вектор).

6. Знайти загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа для скалярної функції, що залежить тільки від r , тільки від полярного кута θ . (сферичні координати).

7. Знайти загальний вигляд розв'язку рівняння Гельмгольца для скалярної функції, що залежить тільки від r . (сферичні координати).

8. Перетворити $\int_V rot A dV$ в інтеграл по поверхні, що охоплює об'єм V .

9. Перетворити $\int_V grad \varphi dV$ в інтеграл по поверхні, що охоплює об'єм V .

10. Довести, що $\int_V r div P dV = \oint_S r(n, P) dS - \int_V P dV$, r - радіус-вектор, n - нормаль до поверхні S .

11. Довести $\int_V [r, rot M] dV = \int_S [r, n, M] dS - 2 \int_V M dV$, r - радіус-вектор, n - нормаль до поверхні S .

12. Всередині об'єму V вектор \vec{A} задовольняє умові $div A = 0$, а на границі об'єму $A_n = 0$. Довести, що $\int_V A dV = 0$.

13. В інерційній системі відліку «Нерухомі зірки» відбуваються дві події – одна на Землі, друга через 5 хвилин на Сонці. Знайти систему відліку, в якій ці події відбуваються одночасно.

14. В інерційній системі відліку «Нерухомі зірки» відбуваються дві події – одна на Землі, друга через 4 хвилини на Сонці. Знайти систему відліку, в якій подія на Сонці відбувається на 4 хвилини раніше, ніж подія на Землі.

15. В інерційній системі відліку «Нерухомі зірки» відбуваються дві події – одна на Землі, друга через 4 хвилини на Сонці. Знайти систему відліку, в якій подія на Сонці відбувається на 2 хвилини раніше, ніж подія на Землі.

16. В інерційній системі відліку «Нерухомі зірки» відбуваються дві події – одна на Землі, друга через 6 хвилин на Сонці. Знайти систему відліку, в якій подія на Сонці відбувається на 2 хвилини раніше, ніж подія на Землі.

17. Довести формулу

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - v'^2/c^2} \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \vec{v}' \cdot \vec{V}/c^2},$$

де \vec{v} і v' – швидкості частинки в системах К і К', V – швидкість К' відносно К.

18. Довести формулу

$$v = \frac{\sqrt{(v' + V)^2 - [\vec{v}', \vec{V}]^2 / c^2}}{1 + \vec{v}' \cdot \vec{V} / c^2},$$

де \vec{v} і v' – швидкості частинки в системах К і К', \vec{V} – швидкість К' відносно К.

19. Два масштаби, кожний з яких має в своїй системі спокою довжину l_0 , рухаються назустріч один одному з рівними швидкостями v відносно деякої системи відліку. Яка довжина кожного з масштабів, що виміряна в системі відліку, що зв'язана з іншим масштабом?

20. Два пучка електронів летять назустріч один одному зі швидкостями $v=0,9c$ відносно лабораторної системи координат. Яка відносна швидкість електронів: 1) з точки зору спостерігача в лабораторії; 2) з точки зору спостерігача, що рухається разом з одним з пучків електронів?

Приклади залікових завдань

Варіант 5

1. Перетворити $\int_V \text{rot} \vec{A} dV$ в інтеграл по поверхні, що охоплює об'єм V .

2. В інерційній системі відліку «Нерухомі зірки» відбуваються дві події – одна на Землі, друга через 4 хвилини на Сонці. Знайти систему відліку, в якій подія на Сонці відбувається на 2 хвилини раніше, ніж подія на Землі.

3. Довести формулу

$$v = \frac{\sqrt{(v'+V)^2 - [\vec{v}', \vec{V}]^2 / c^2}}{1 + \vec{v}' \cdot \vec{V} / c^2},$$

де \vec{v} и v' – швидкості частинки в системах K і K' , \vec{V} – швидкість K' відносно K .

4. Довести, що законом збереження енергії-імпульса заборонена анігіляція пари електрон - позитрон, що супроводжується випусканням одного γ -кванта, але нема заборони на реакцію з випусканням двох фотонів.

Варіант 6

1. У всіх інерційних системах відліку задана сукупність чотирьох величин A_i ($i=1,2,3,4$) і відомо, що $A_i B_i = \text{inv}$. Довести, що якщо B_i – 4-вектор, то A_i – також 4-вектор.

2. В інерційній системі відліку «Нерухомі зірки» відбуваються дві події – одна на Землі, друга через 4 хвилини на Сонці. Знайти систему відліку, в котрій подія на Сонці відбувається на 3 хвилини раніше, ніж події на Землі.

3. Довести

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - v'^2/c^2} \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \vec{v}' \cdot \vec{V} / c^2},$$

де \vec{v} и v' – швидкості частинки в системах K та K' , \vec{V} – швидкість K' відносно K .

4. Виразити імпульс релятивістської частинки через її кінематичну енергію T .

Варіант 7

1. Довести, що символ Кронекера – справжній тензор другого рангу.

2. Перетворити $\int_V \text{grad} \varphi dV$ в інтеграл по поверхні, що охоплює об'єм V .

3. В інерційній системі відліку «Нерухомі зірки» відбуваються дві події – одна на Землі, друга через 6 хвилини на Сонці. Знайти систему відліку, в котрій подія на Сонці відбувається на 3 хвилини раніше, ніж події на Землі.

4. Частинка з масою m налітає на частинку в спокої з масою m_1 . Відбувається реакція, в якій народжується ряд частинок з загальною масою M . Знайти мінімальне значення кінетичної енергії частинки (енергетичний поріг реакції T_0), починаючи з котрого реакція стає енергетично можливою.

Варіант 8

1. Хай A_α трьохвимірний вектор. Довести, що $\partial A_\alpha / \partial x_\beta$ - тензор другого ранга.
2. Знайти загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа для скалярної функції, що залежить тільки від r , тільки от θ . (сферичні координати).
3. Два масштаби, кожний з яких має в своїй системі спокою довжину l_0 , що рухається назустріч один одному з рівними швидкостями v відносно деякої системи відліку. Яка довжина кожного з масштабів, виміряна в системі відліку, зв'язаній з іншим масштабом.
4. Виразити прискорення частинки через її швидкість і напруженість електричного і магнітного полів.

Варіант 11

1. Перетворити $\int_V \text{rot} \vec{A} dV$ в інтеграл по поверхні, що охоплює об'єм V .
1. В інерційній системі відліку «Нерухомі зірки» відбуваються дві події – одна на Землі, друга через 4 хвилини на Сонці. Знайти систему відліку, в якій подія на Сонці відбувається на 4 хвилини раніше, ніж подія на Землі.
2. Два електрони летять назустріч один одному зі швидкостями $0,9c$ і $0,8c$. Чому дорівнює їх відносна швидкість: 1. в лабораторній системі відліку; 2. в системі відліку, що зв'язана з одним з електронів?
3. Нерухома частинка маси M розпалася на дві частинки з масами m_1 та m_2 . Знайти їх енергії.

Варіант 14

1. Довести, що $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\lambda\mu\nu} = \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda}$
2. Виразити імпульс релятивістської частинки через її кінематичну енергію.
3. В інерційній системі відліку «Нерухомі зірки» відбуваються дві події – одна на Землі, друга через 4 хвилини на Сонці. Знайти систему відліку, в якій подія на Сонці відбувається на 2 хвилини раніше, ніж подія на Землі.
4. Знайти енергію частинки, котра утворилася в результаті непружного зіткнення двох однакових частинок маси m та імпульсами $p_1 = -p_2 = p_0$, котрі летіли назустріч один одному.

Варіант 15

1. Довести, що символ Леві-Чівіта псевдотензор третього ранга.
2. В інерційній системі відліку «Нерухомі зірки» відбуваються дві події – одна на Землі, друга через 6 хвилини на Сонці. Знайти систему відліку, в якій подія на Сонці відбувається на 2 хвилини раніше, ніж подія на Землі.
3. Два електрони летять назустріч один одному зі швидкостями $0,6c$ і $0,8c$. Чому дорівнює їх відносна швидкість: 1. в лабораторній системі відліку; 2. в системі відліку, що зв'язана з одним з електронів?
4. Нерухома частинка з енергією ϵ_0 розпалася на дві однакових частинки маси m . Знайти їх швидкості.

Варіант 16

1. Чому дорівнює тензор $A_{\alpha\beta\gamma}$ симетричний за першими двома індексами і антисиметричний за останніми двома?
2. В інерційній системі відліку «Нерухомі зірки» відбуваються дві події – одна на Землі, друга через 3 хвилини на Сонці. Знайти систему відліку, в якій подія на Сонці відбувається на 3 хвилини раніше, ніж подія на Землі.
3. Два масштаби, кожний має довжину спокою l_0 , рівномірно рухаються назустріч один одному паралельно спільній вісі x . Спостерігач, що зв'язаний з одним з них, помітив, що між співпадінням лівих та правих масштабів пройшов час Δt . Яка відносна швидкість масштабів?
4. Довести, що неможлива анігіляція пари електрон-позитрон, що супроводжується випусканням одного фотона, але нема заборони на реакцію з випусканням двох фотонів.